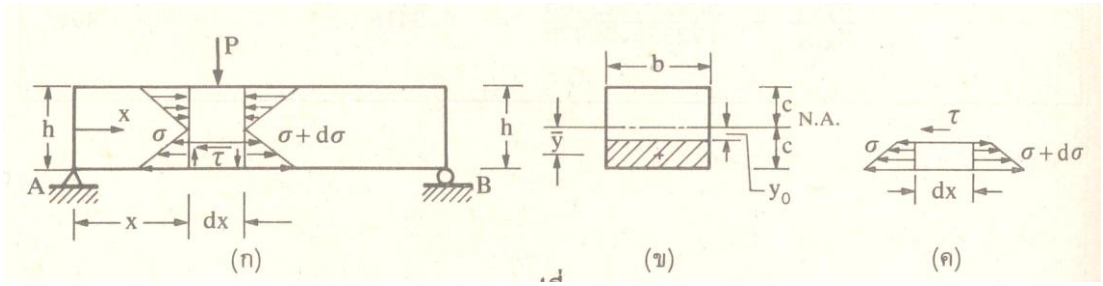
ความเค้นเฉือนในคาน

Shear Stress in Beam

เมื่อคานถูกกระทำด้วยแรงภายนอกหรือมีน้ำหนักกระทำกับคานแล้ว ก็จะทำให้เกิดแรงต้านทานภายในขึ้นมาสองตัวด้วยกันคือ แรงเฉือนในแนวดิ่งและโมเมนต์ดัด สำหรับค่าของโมเมนต์ดัดจะทำให้เกิดความเค้นดัดตั้งฉากขึ้นบนหน้าตัดทางขวางของคาน โดยจะหาได้จากสมการ $\sigma = \frac{Mc}{I}$ และในขณะเดียวกันแรงเฉือนในแนวดิ่งก็จะทำให้เกิดความเค้นเฉือนเกิดขึ้นอีก

6.1 ความเค้นเฉือนของคาน



พิจารณาคานช่วงเดียว (Simply supported beam) ในรูปที่ 1 มีแรง P กระทำ ถ้าคานมีรูปหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า มีขนาดกว้าง b และสูง h ที่หน้าตัดระยะ x จะมีโมเมนต์ M กระทำและทำให้เกิดความเค้นดัด σ ส่วนที่หน้าตัดระยะ x+dx จะมีโมเมนต์ดัด M+dM และทำให้เกิดความเค้นดัดเป็น $\sigma + d\sigma$ ถ้าให้ระยะ dx มีขนาดเล็กมาก ค่าของความเค้นเฉือน τ จะมีค่าคงที่ นอกจากนี้ให้ความเค้นเฉือน τ มีค่าคงที่ตลอดความกว้างของคาน b รูป free body diagram ของ element ของคานที่ระดับ y_0 จากแนวแกนสะเทิน (N.A.) ถูกแสดงในรูปที่ 1 (ค) เนื่องจากว่า element นี้อยู่ในสภาวะสมดุล ฉะนั้นแรงรวมตามแนวแกน x จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$[\Sigma Fx = 0] \qquad \int(\sigma + d\sigma)\, dA - \int \sigma dA - \tau b g dx \quad = \quad 0$$

โดยที่ dA เป็น element ของพื้นที่หน้าตัด

แต่ $\sigma = \frac{My}{I}$ และ $\sigma + d\sigma = \frac{(M+dM)y}{I}$

$$\int_{y_0}^{c} \frac{(M+dM)y}{I} dA - \int_{y_0}^{c} \frac{My}{I} dA - \tau b g dx \quad = \quad 0$$

$$\int_{y_0}^{c}\frac{My}{I}dA+\int_{y_0}^{c}\frac{dM\,y\,dA}{I}-\int_{y_0}^{c}\frac{My\,dA}{I}-\tau b\,dx = 0$$

$$\tau b\,dx = \int_{y_0}^{c}\frac{dM\,y\,dA}{I}$$

$$\tau = \frac{1}{b\,dx}\int_{y_0}^{c}\frac{dM\,y\,dA}{I}$$

$$= \frac{1}{Ib}\frac{dM}{dx}\int_{y_0}^{c} y\,dA$$

แต่ $\frac{dM}{dx}=V$ และให้ $Q=\int_{y_0}^{c} y\,dA$

$$\therefore\ \tau=\frac{VQ}{Ib}$$

เมื่อ τ คือความเค้นเฉือนในคาน

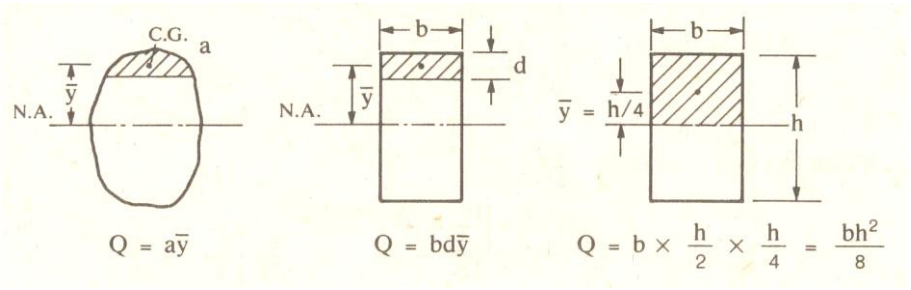
I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของคาน

V คือแรงเฉือนในแนวดิ่ง

b คือความกว้างของคาน

Q คือโมเมนต์ของพื้นที่รอบแกนสะเทิน $= \int_{y_0}^{c} y\,dA = a\bar{y}$

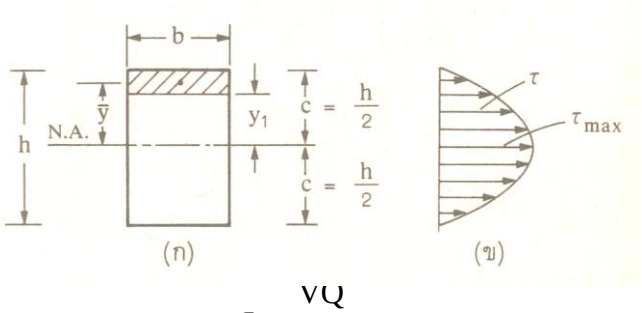
ตัวอย่างการหาค่า Q



จากรูปที่ 2 ค่า a ไม่ใช่พื้นที่ของหน้าตัดทั้งหมดของคานนั้น แต่เป็นพื้นที่จากระดับที่ต้องการหาความเค้นเฉือนไปยังผิวบนสุดหรือผิวล่างสุดก็ได้ ส่วนระยะ $\bar{y}$ เป็นระยะจากจุดศูนย์ถ่วง (Centroid) ของพื้นที่ a ไปยังแนวแกนสะเทิน (neutral axis)

6.2 ความเค้นเฉือนในคานรูปหน้าตัดต่างๆ

1. เมื่อหน้าตัดคานเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า สำหรับคานที่มีรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยมีความกว้าง b ความสูง h และมีแรงเฉือน V ที่กระทำกับพื้นที่หน้าตัดนั้น แสดงดังรูปที่ 3



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

จากรูปที่ 5.15 (ก) ค่า Q ของพื้นที่ที่อยู่เหนือระยะ y_1 ขึ้นไป = $A'\bar{y}$

$$= b(c-y_1)\frac{1}{2}(c+y_1) = \frac{1}{2}b(c^2-y_1^2)$$

ในที่นี้ $c = \frac{h}{2}$

$$\therefore \tau = \frac{V\frac{1}{2}b(\frac{h^2}{4}-y_1^2)}{Ib} = \frac{V}{2I}(\frac{h^2}{4}-y_1^2)$$

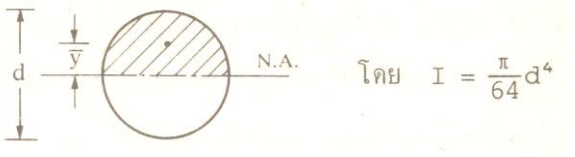
แสดงว่าการกระจายของแรงเค้นเฉือนบนหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นรูปพาราโบล่าตามระยะ y_1^2 จากแกนสะเทินดังรูปที่ 5.15 (ข)

เมื่อค่า $y_1 = \pm\frac{h}{2}$ ที่ผิวบนและล่างของคานค่า $\tau = 0$ และเมื่อ $y_1 = 0$ ที่แกนสะเทินค่าแรงเค้นเฉือนจะมีค่าสูงสุด (แทนค่า $I = \frac{bh^3}{12}$)

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

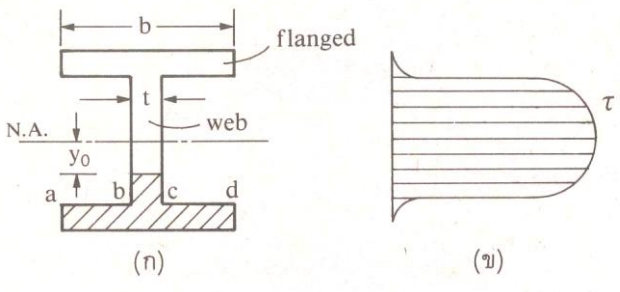
แสดงว่าค่าแรงเค้นเฉือนสูงสุดที่แกนสะเทินของหน้าตัดคานมีค่ามากเป็น 1.5 เท่าของแรงเค้นเฉือนเฉลี่ย $\frac{V}{A}$ ที่สมมุติอย่างผิด ๆ ให้แรงเค้นเฉือนกระจายสม่ำเสมอทั้งพื้นที่หน้าตัด

2. เมื่อหน้าตัดคานเป็นรูปวงกลม สำหรับคานที่มีรูปหน้าตัดเป็นรูปวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง d และมีแรงเฉือน V กระทำกับพื้นที่หน้าตัดนั้น ซึ่งแสดงดังรูปที่ 4



$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

3. เมื่อหน้าตัดของคานเป็นรูปตัว I สำหรับ flanged-type beam ดังเช่นหน้าตัดของคานรูปตัว I และตัว U จะใช้สมการ $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ ที่ flanged ไม่ได้ ด้วยเหตุผลดังต่อไปนี้



ถ้าพิจารณาหน้าตัดของคานรูปตัว I ดังรูปที่ 5(ก) จะเห็นว่าความเค้นเฉือนจะเป็นศูนย์ที่ผิวนอกจาก a ถึง b และจาก c ถึง d แต่ว่าในช่วงจาก b ถึง c ในระดับเดียวกันค่าความเค้นเฉือนจะไม่เท่ากับศูนย์ ฉะนั้นจะเกิดความไม่ต่อเนื่องของความเค้นเฉือนขึ้นที่ระดับนี้ แต่เนื่องจากสูตร $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ ได้มาจากการที่สมมติให้ความเค้นเฉือนมีค่าคงที่ตลอดความกว้าง b ฉะนั้นสูตรนี้จึงใช้สำหรับหาความเค้นเฉือนได้เฉพาะในสันกลางเท่านั้น

อย่างไรก็ตามถ้าปีก (flange) มีขนาดบางพอสมควร จากการคำนวณหาโดยใช้ทฤษฎีที่ซับซ้อนกว่าจะพบว่า การกระจายของความเค้นเฉือนมีลักษณะ ดังรูปที่ 5(ข)

สำหรับคานรูปหน้าตัดเป็นรูปตัว I โดยทั่ว ๆ ไป จากการคำนวณจะเห็นได้ว่าความเค้นเฉือนในแนวดิ่งที่ขนานกับพื้นที่หน้าตัดใน flange มีค่าน้อยมาก แรงเฉือนเกือบทั้งหมด (ประมาณ 95 เปอร์เซ็นต์) web จะเป็นตัวรับไว้ ดังนั้นโดยทั่วไปเราก็สมมติว่าเฉพาะ web เท่านั้นจะเป็นตัวรับแรงเฉือนไว้ทั้งหมด

ดังนั้นสมการที่ใช้หาความเค้นเฉือนคือ

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

เมื่อ τ คือความเค้นเฉือนในคาน

I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนสะเทินของคาน

V คือแรงเฉือนในแนวดิ่ง

t คือความหนาของ web

Q คือโมเมนต์ของพื้นที่รอบแกนสะเทิน $= a\bar{y}$

การพิจารณาทั้งโมเมนต์ดัดและแรงเฉือนสำหรับการออกแบบคาน

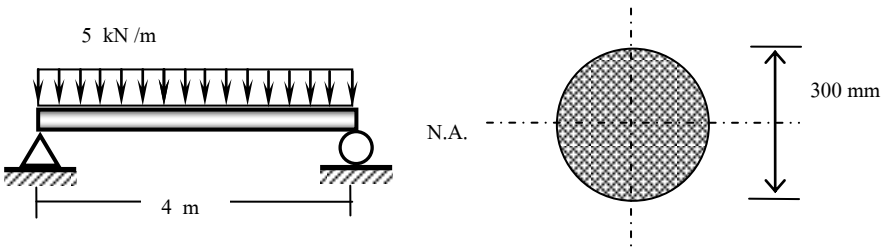
ในการหาว่าคานจะรับแรงภายนอกหรือน้ำหนักได้เท่าใดนั้น หรือการหาขนาดของหน้าตัดของคานว่ามีค่าเท่าใด เราจะพิจารณาถึงเงื่อนไขของความเค้นดัดที่เกิดจากโมเมนต์ดัด และความเค้นเฉือนที่เกิดจากแรงเฉือนพร้อมกัน โดยต้องอยู่ในเงื่อนไขทั้ง 2 นี้ด้วย

สำหรับคานสั้นๆที่อยู่ภายใต้แรงที่มีค่าสูง ความเค้นเฉือนมักจะเป็นตัวบังคับในการออกแบบ แต่สำหรับคานที่ยาวๆ ความเค้นดัดจะเป็นตัวบังคับที่ใช้ในการออกแบบ

สำหรับคานที่ทำด้วยไม้นั้น ควรพิจารณาความเค้นเฉือนเสมอ เพราะว่าความแข็งแรงของการเฉือนของไม้มีค่าไม่สูงนัก

ตัวอย่างที่ 1

คานดังรูป มีแรง w เท่ากับ 5 kN/m กระทำ จงหาขนาดของความเค้นเฉือนสูงสุดในคาน



วิธีทำ

$$V_{max} = \frac{wl}{2}$$

$$= \frac{5 \times 4}{2} = 10 \text{ kN}$$

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\cdot\frac{V}{A}$$

เมื่อ A = $\frac{\pi}{4}(300)^2$ = 70685.8347 mm^2, V = 10 x 10^3 N

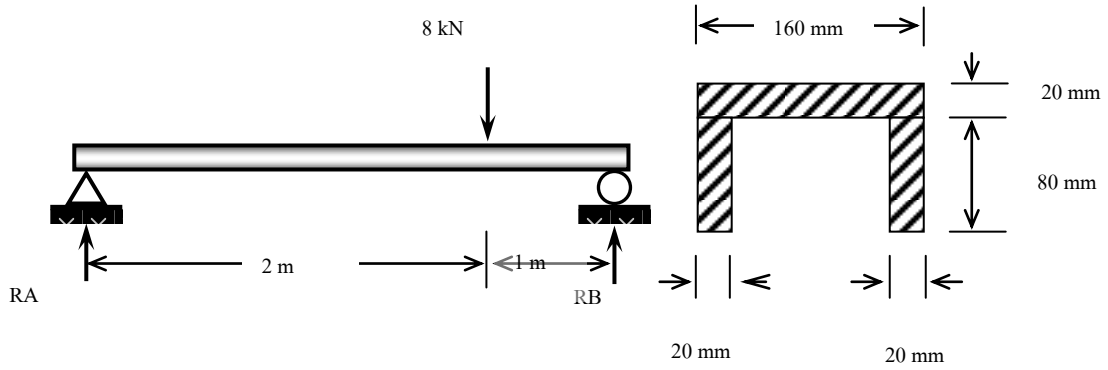
$$\tau_{max} = \frac{4\times10\times10^3}{3\times70685.8347}$$

$$= 0.18862 \quad N/mm^2$$

∴ ความเค้นเฉือนสูงสุดเท่ากับ 188.628 kN/m^2 **Ans**

ตัวอย่างที่ 2

คานแบบช่วงเดียวมีหน้าตัดดังรูป รับแรง 8 กิโลนิวตัน กระทำอยู่บนคานดังรูป จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้น



วิธีทำ

$\sum M_B = 0$

$R_A = 2.6667$ kN

$R_B = 5.33333$ kN

$V_{max} = 5.33333$ kN

$$\bar{y} = \frac{\bar{A}_1\bar{y}_1 + 2(\bar{A}_2\bar{y}_2)}{A_1 + 2(A_2)} = \frac{(160\times20\times90) + 2(80\times20\times40)}{(160\times20) + 2(80\times20)} = 65 \text{ mm}$$

$$I_{N.A.} = \left[\left(\frac{1}{12}\times160\times20^3\right) + \left(160\times20\times25^2\right)\right] + 2\left[\left(\frac{1}{12}\times20\times80^3\right) + \left(20\times80\times25^2\right)\right]$$

$I_{N.A.} = 5183333.333$ mm^4

เมื่อ $Q = 2\left[20\times65\times\frac{65}{2}\right] = 84500 \text{ mm}^3$

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

เมื่อ $b = 40 \text{ mm}$

$$\tau = \frac{5.3333\times10^3\times84500}{5813333.333\times40}$$

$$= 1.938 \text{ N/mm}^2$$

∴ ความเค้นเฉือนสูงสุดในคานเท่ากับ 1.938 N/mm^2 **Ans**