	เนื้อหาการสอน	สัปดาห์ที่ 16	หน้าที่ 1
รหัสและชื่อวิชา : 3100 0107 ความแข็งแรงของวัสดุ		-	-
แผนกวิชา : **ช่างก่อสร้าง**	ชื่อสถานศึกษา: **วิทยาลัยเทคนิคเชียงใหม่**		

บทที่ 5 การโก่งของคาน

Deflection of beam

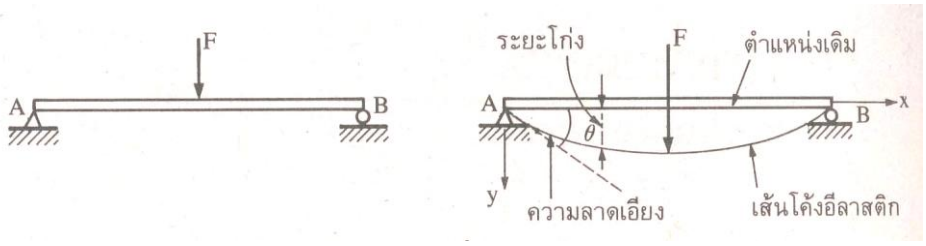
การโก่งของคาน

คานเป็นส่วนของโครงสร้างที่ทำหน้าที่รับโมเมนต์ดัดและแรงเฉือน ซึ่งเกิดจากแรงภายนอกที่กระทำหรือน้ำหนักบรรทุกบนคานนั้น เมื่อคานได้รับน้ำหนักหรือแรงภายนอกกระทำ คานก็จะเกิดการแอ่นลงหรือโก่งงอทำให้คานไม่อยู่ในแนวตรงเหมือนตอนแรกที่ยังไม่ได้รับน้ำหนัก ฉะนั้นในการคำนวณและออกแบบคานที่รับน้ำหนักจะต้องคำนึงถึงการดก่งของคานด้วย นอกเหนือไปจากความเค้นดัดและความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นในคานตามปกติ

เส้นโค้งอีลาสติก (Elastic curve) เป็นเส้นที่อยู่ในแนวแกนสะเทินของคาน ซึ่งแสดงลักษณะการโก่งของคานเมื่อมีแรงภายนอกหรือน้ำหนักบรรทุกกระทำอยู่บนคาน ในขณะที่คานยังไม่มีแรงภายนอกหรือน้ำหนักมากระทำบนคาน เส้นโค้งอีลาสติกนี้เป็นเส้นตรงและอยู่ในแนวเดียวกันกับแนวของแกนสะเทิน เมื่อคานรับแรงภายนอกหรือน้ำหนักบรรทุกขึ้น เส้นโค้งอีลาสติกนี้ก็จะแอ่นหรือโก่งไปจากตำแหน่งเดิม ลักษณะของการดก่งของคานนี้ขึ้นอยู่กับค่าของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคานนั้น

ความลาดเอียง (Slope) ของคานที่จุดใดๆ หมายถึงมุมระหว่างแนวเดิมของคานกับเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสกับโค้งอีลาสติกที่จุดนั้น

ระยะโก่ง (Deflection) หรือการแอ่นของคานจุดใดๆ หมายถึงระยะในแนวดิ่งที่จุดนั้นบนเส้นโค้งอีลาสติกที่เคลื่อนที่ไปจากตำแหน่งเดิม (ก่อนจะรับน้ำหนักนั้น)



รูปที่ 1

ข้อสมมติฐานในการคำนวณหาระยะโก่งของคานมีดังนี้

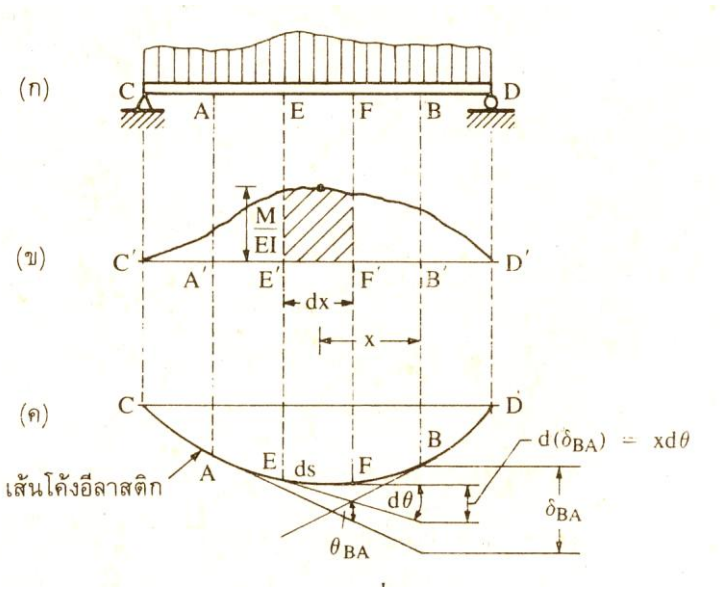
1. ก่อนที่คานจะรับน้ำหนักหรือแรงภายนอก คานจะต้องอยู่ในแนวตรงระดับเดียวกับแนวระดับเสมอ
2. การโก่งของคานจะคิดเฉพาะเนื่องจากโมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียว
3. ความเค้นที่เกิดจากน้ำหนักหรือแรงที่กระทำจะต้องไม่เกินขีดจำกัดยืดหยุ่น

4. ระนาบของหน้าตัดคานก่อนรับและหลังรับโมเมนต์ดัดจะยังคงเป็นระนาบเดิม
5. การโก่งของคานจะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวของคาน

Moment-Area

วิธีของ moment-area เป็น simigraphical method ซึ่งจะทำให้สามารถหาความลาดเอียงและระยะโก่ง ณ ตำแหน่งใดๆ บนเส้นโค้งอีลาสติกของคานได้ และถ้าหากว่าเราต้องการที่จะทราบแต่เพียงความลาดเอียง หรือระยะโก่งของเส้นโค้งอีลาสติกเพียงสองสามตำแหน่งเท่านั้น วิธีนี้จะมีความสะดวกและรวดเร็ว

ทฤษฎีที่ใช้หาความลาดเอียงและระยะโก่งที่ใช้ในวิธี moment-area จะมีอยู่ด้วยกัน 2 ทฤษฎี คือทฤษฎีหนึ่งจะใช้สำหรับหาความลาดเอียง อีกทฤษฎีหนึ่งใช้สำหรับหาระยะโก่งของคานนั้น



รูปที่ 2

ในการพิสูจน์หาทฤษฎีทั้งสองนั้นให้พิจารณาคานซึ่งถูกกระทำด้วยแรงใดๆ ในรูปที่ 2(ก) ถ้าคานมีหน้าตัดสม่ำเสมอ (EI = คงที่) $\frac{M}{EI}$ diagram จะมีรูปร่างเช่นเดียวกับ BMD ดังในรูป 2(ข) ส่วนเส้นโค้งอีลาสติกจะแสดงในรูปที่ 2(ค)

จากความสัมพันธ์ที่ได้ว่า $\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}$

เมื่อกรณีที่ระยะโก่งของคานมีค่าน้อยมาก ค่า $ds \approx dx$

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{M\,dx}{EI}$$

$$\int_B^A d\theta = \int_B^A \frac{M\,dx}{EI}$$

$$\theta_{AB} = \int_B^A \frac{M\,dx}{EI}$$

เมื่อ θ_{AB} คือมุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A และ B บนเส้นโค้งอีลาสติกมีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุด A และ B ในกรณีที่พื้นที่มีทั้งบวกและลบ ก็ให้คิดเครื่องหมายของพื้นที่เหล่านั้นด้วย ฉะนั้นเราจะได้ทฤษฎีที่หนึ่งว่า "เมื่อคานตรงถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด มุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดใดๆ สองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติก จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างสองจุดนั้น"

ต่อไปให้ δ_{BA} เป็นระยะทางในแนวดิ่งของจุด B เมื่อเทียบกับเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A ไป ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$d(\delta_{BA}) = x\,d\theta$$

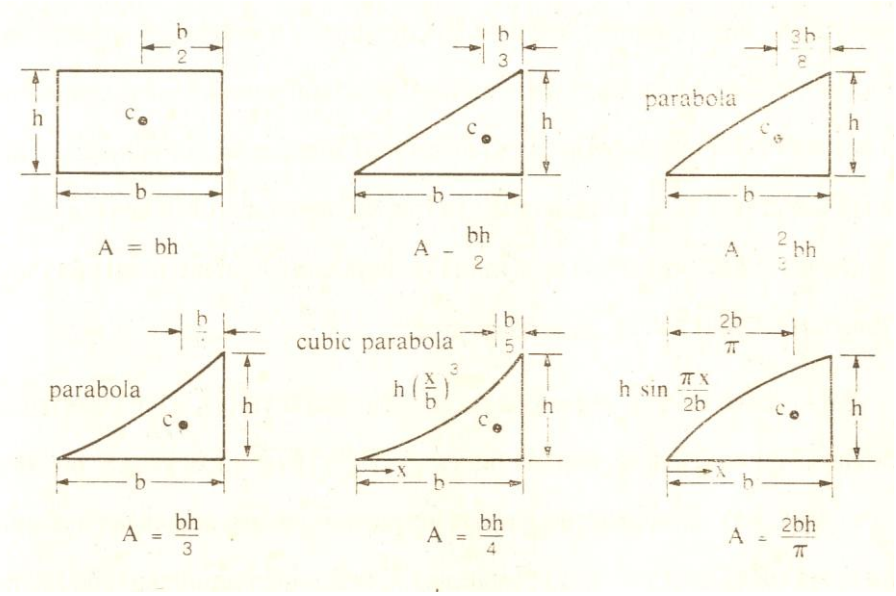
$$\int d(\delta_{BA}) = \int_B^A x\,d\theta$$

$$\delta_{BA} = \int_B^A \frac{Mx\,dx}{EI}$$

จะเห็นได้ว่า $\int_B^A \frac{Mx\,dx}{EI}$ เป็นค่าของโมเมนต์ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุด A และจุด B เทียบกับแกนผ่านจุด B ฉะนั้นจึงได้ทฤษฎีสำหรับการหาระยะโก่งซึ่งเป็นทฤษฎีที่สองว่า "เมื่อคานตรงถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด ระยะในแนวดิ่งของจุด B เมื่อเทียบกับเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบแกนซึ่งผ่านจุด B ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุดทั้งสองนั้น"

ในการหาโมเมนต์ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ซึ่งมีพื้นที่ที่มีทั้งค่าบวกและลบ ก็ให้คิดเครื่องหมายของพื้นที่เหล่านั้นด้วย

เนื่องจากการคำนวณหาระยะโก่ง โดยวิธีนี้มีความจำเป็นที่จะต้องรวมโมเมนต์ของพื้นที่รอบแกนๆ หนึ่งเสมอ ฉะนั้นจึงแสดงถึงจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่ชนิดต่างๆ ซึ่งต้องใช้อยู่บ่อยครั้งดังต่อไปนี้



รูปที่ 3

ขั้นตอนการหาค่าความลาดเอียงและระยะโก่งโดยวิธี Moment-area

1. จากโจทย์ที่กำหนดให้ถ้าเป็นคานแบบช่วงเดียวหรือคานช่วงเดียวปลายยื่น จะต้องคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับก่อน ส่วนคานแบบยื่นไม่จำเป็นจะต้องหา
2. เขียนแผนผังของโมเมนต์ดัด (BMD) จากการคำนวณหาได้จากโจทย์ที่กำหนดให้
3. เขียนเส้นโค้งอีลาสติก แสดงถึงลักษณะการโก่งของคานให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด
4. เขียนแผนผังของ $\frac{M}{EI}$ diagram
5. เลือกจุดบนเส้นโค้งอีลาสติกที่ทราบค่าความลาดเอียงหรือระยะโก่ง เช่น จุดรองรับหรือจุดที่อยู่ในแกนสมมาตร หรือจุดที่โจทย์กำหนดค่าแน่นอนมาให้ เป็นต้น แล้วลากเส้นสัมผัสกับจุดที่เลือกนั้น
6. คำนวณหาการเคลื่อนที่ของจุดเทียบจากเส้นสัมผัสในข้อ 5
7. คำนวณหาระยะโก่งและความลาดเอียงโดยการพิจารณาลักษณะของเส้นโค้งอีลาสติก และอาศัยทฤษฎีทั้งสองทฤษฎีนั้นเข้าช่วย

ลำดับการคำนวณ

จากทฤษฎีทั้งสองข้างต้น เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณความลาดและระยะโก่งของจุดใด ๆ บนคาน โดยมีลำดับการคำนวณดังต่อไปนี้

1. สร้างแผนผังโมเมนต์ดัดของคานที่กำหนดให้
2. สร้างแผนผัง $\frac{M}{EI}$ โดยหารค่า M ของทุกจุดด้วยค่า EI ในกรณีที่คานมีค่า EI คงที่ตลอดทั้งคาน รูปแผนผัง $\frac{M}{EI}$ จะเป็นแบบเดียวกับแผนผังโมเมนต์ดัด ดังนั้นอาจสร้างแผนผังโมเมนต์ดัดอย่างเดียว แล้วหารด้วยค่า EI ในขั้นตอนของการคำนวณ
3. เขียนเส้นโค้งยืดหยุ่นที่ควรจะเป็นของคาน
4. เลือกจุดบนเส้นโค้งยืดหยุ่นที่ทราบค่าความลาดหรือระยะโก่ง เช่น จุดรองรับ หรือจุดที่อยู่ในแกนสมมาตร หรือจุดที่โจทย์กำหนดค่าแน่นอนมาให้ เป็นต้น ลากเส้นสัมผัสกับจุดที่เลือก
5. ใช้ทฤษฎีที่ 1 หรือทฤษฎีที่ 2 คำนวณค่าความลาดที่เปลี่ยนไป หรือระยะเบี่ยงเบนของจุดอื่นที่ต้องการ โดยเทียบกับจุดที่เลือกในข้อ (4)
6. คำนวณหาค่าความลาดหรือระยะโก่งตัว

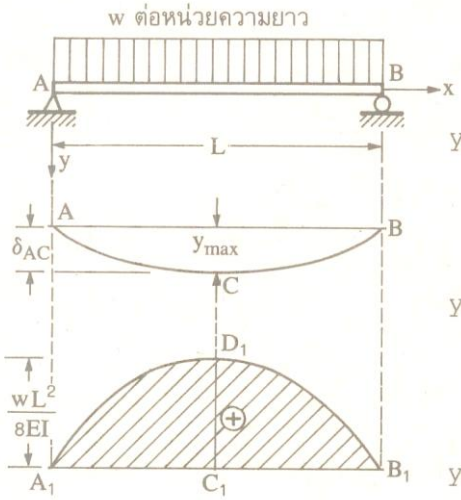
การคิดเครื่องหมาย

1. ค่าความลาดที่เปลี่ยนไปจากซ้ายไปขวาระหว่างสองจุดบนเส้นโค้งยืดหยุ่น จะเป็นบวกในกรณีพื้นที่แผนผัง $\frac{M}{EI}$ เป็นบวก หรือเมื่อเส้นสัมผัสที่จุดด้านขวาหมุนทวนเข็มและจะเป็นลบในกรณีที่พื้นที่แผนผัง $\frac{M}{EI}$ เป็นลบ หรือเมื่อเส้นสัมผัสที่จุดด้านขวาหมุนตามเข็ม
2. ระยะเบี่ยงเบนของจุดใด ๆ จะมีค่าบวกเมื่อจุดนั้นอยู่เหนือเส้นสัมผัสที่ลากจากอีกจุดหนึ่ง แต่จะมีค่าลบ เมื่อจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัสที่ลากจากอีกจุดหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1

จงหาระยะโก่งสูงสุดของคานช่วงเดียว ซึ่งถูกกระทำด้วยแรงแผ่นกระจายสม่ำเสมอ โดยวิธี Moment-Area

วิธีทำ



$\frac{M}{EI}$ diagram

$$M = \frac{wL^2}{8}$$

$$y_{max} = \delta_{AC}$$

= โมเมนต์ของพื้นที่ $A_1D_1C_1$ รอบแกน A_1

$$y_{max} = \frac{2}{3}\left(\frac{wL^2}{8EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{5}{8}\times\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{5wL^4}{384EI}$$

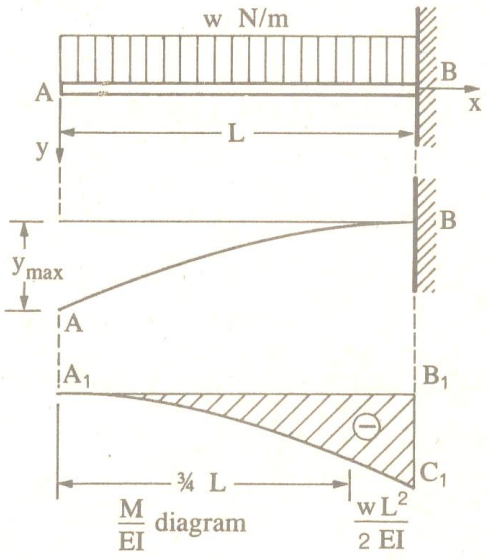
$$y_{max} = \frac{5wL^4}{384EI}$$

$\therefore$ ระยะโก่งสูงสุดของคานเท่ากับ $\frac{5wL^4}{384EI}$ *ตอบ*

ตัวอย่างที่ 2

จงหาระยะโก่งสูงสุดของคานแบบยื่นซึ่งถูกกระทำด้วยแรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอ โดยวิธี Moment-area

วิธีทำ



$$M = -\frac{wL^2}{2}$$

$$Y_{max} = \delta_{AB}$$

= โมเมนต์ของพื้นที่ $A_1B_1C_1$ รอบแกน A_1

$$Y_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{wL^2}{2EI}\right)(L)\left(\frac{3}{4}L\right)$$

$$= \frac{wL^4}{8EI}$$

$$Y_{max} = \frac{wL^4}{8EI}$$

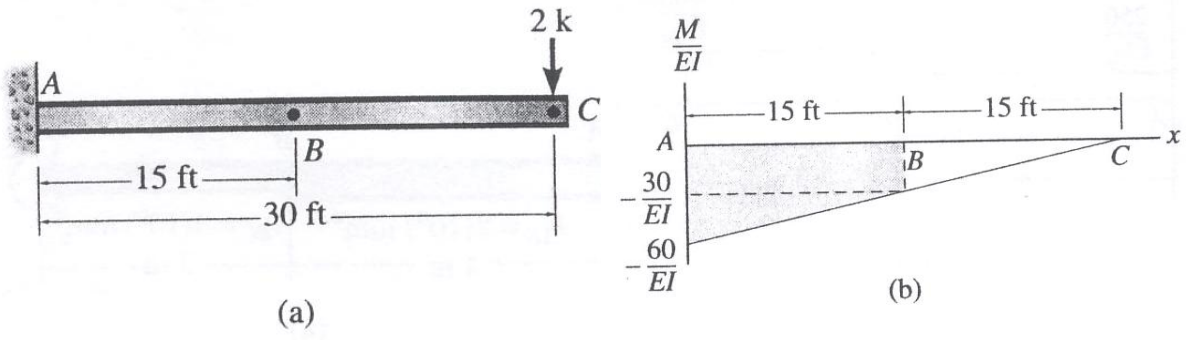
∴ ระยะโก่งสูงสุดของคานเท่ากับ $\frac{wL^4}{8EI}$ *ตอบ*

Example 3

Determine the slope at point B and C of the beam shown in Fig 8 – 13 a. Take $E = 29(10^3)$ ksi and $I = 600$ in^4

SOLUTION

M/EI Diagram. This diagram is shown in Fig. 8 – 13 b. It is easier to solve the problem in terms of *EI* and substitute the numerical data as a last step.



Elastic Curve. The 2-k load causes the beam to deflect as shown in Fig. 8-13c. (The beam is deflected concave down, since M/EI is negative.)

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

$$\theta_C = \theta_{C/A}$$

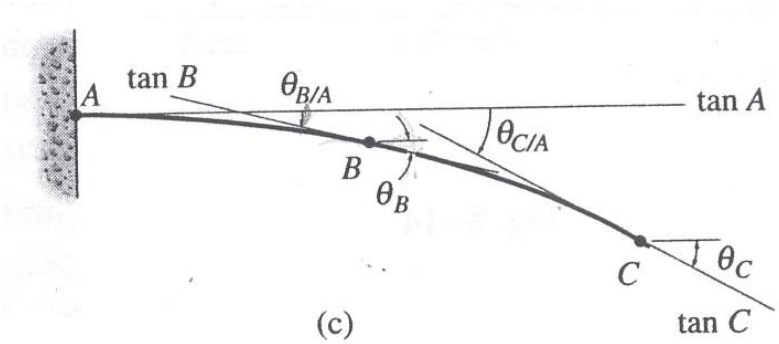


Fig. 8–13

Moment-Area Theorem. Applying Theorem 1, $\theta_{B/A}$ is equal to the area under the M/EI diagram between point A and B; that is,

$$\theta_B = \theta_{B/A} = -\left(\frac{30k \cdot ft}{EI}\right)(15\,ft) - \frac{1}{2}\left(\frac{60k \cdot ft}{EI} - \frac{30k \cdot ft}{EI}\right)(15\,ft)$$

$$= -\left(\frac{675k \cdot ft^2}{EI}\right)$$

Substituting numerical data for E and I, and converting feet to inches, we have

$$\theta_B = \frac{-675k \cdot ft^2\left(144in^2/1ft^2\right)}{29\left(10^3\right)k/in^2\left(600in^4\right)}$$

$$= \text{ - } 0.00559 \text{ rad} \qquad \textbf{Ans.}$$

The negative sign indicates that the angle is measured clockwise from A, Fig 8-13c.

In a similar manner, the area under the M/EI diagram between points A and C equals $\theta_{C/A}$ We have

$$\theta_C = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{60k \cdot ft}{EI}\right)(30\,ft)$$

$$= -\frac{900k \cdot ft^2}{EI}$$

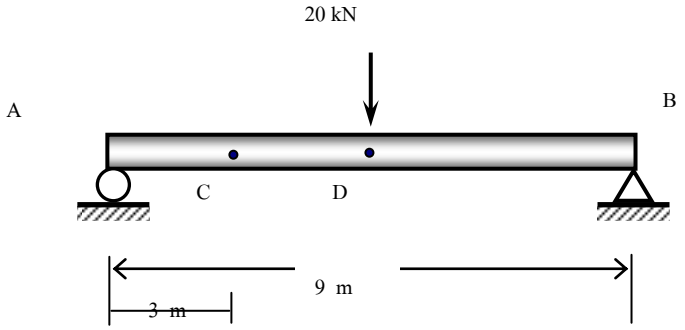
Substituting numerical values for EI, we have

$$\theta_C = \frac{-900k \cdot ft\left(144in^2/ft^2\right)}{29\left(10^3\right)k/in^2\left(600in^4\right)}$$

$$= \text{ - } 0.00745 \text{ rad} \qquad \textbf{Ans.}$$

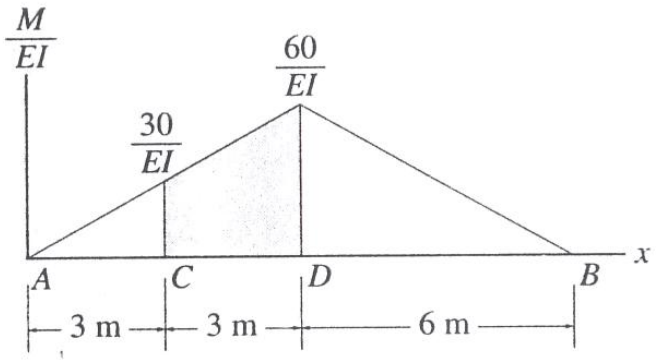
Example 4

Determine the slope at point C of the beam shown in Fig 8 – 15 a. Take E = 200 GPa and I = $60(10^6)$ mm^4.



SOLUTION

M/EI Diagram. Fig b.

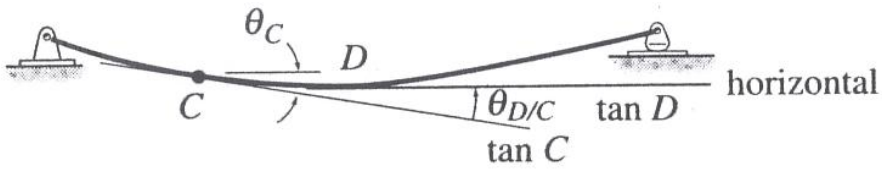


(b)

Elastic Curve.

Since the loading is applied symmetrically to the beam, the elastic curve is symmetric, as shown in Fig. C. We are required to fined θ_C This can easily de done, realizing that the tangent at D is horizontal, and therefore, by the construction the angle $\theta_{D/C}$ between tan C and tan D is equal to θ_C that is,

$$\theta_C = \theta_{D/C}$$



(c)

Moment – Area Theorem.

Using theorem 1, $\theta_{D/C}$ is equal to the shaded area under the M/EI Diagram between point C and D. We have

$$\theta_C = \theta_{D/C} = 3m\left(\frac{30kN\cdot m}{EI}\right)+\frac{1}{2}(3m)\left(\frac{60kN\cdot m}{EI}-\frac{30kN\cdot m}{EI}\right)$$

$$= \frac{135kN\cdot m^2}{EI}$$

Thus,

$$\theta_C = \theta_{D/C} = \frac{135kN\cdot m^2}{\left(200\times10^6\right)kN/m^2\left(6\times10^6\times10^{-12}\right)m^4}$$

$$= 0.112 \quad \text{rad}$$ **Ans**